PREFACE

Ce cours d'Analyse est destiné aux étudiants inscrits en première année Physique-Chimie. Il a été rédigé en français facile pour qu'il soit accessible à tous les interessés. En espérant que ceux-ci y trouveront tous les éléments nécessaires à une meilleure compréhension, je leurs souhaite une bonne année d'études.

Tétouan le 21 Juillet 1990

ZERTITI Abderrahim

ETUSUP .com

TABLE DE MATIERES

CHAPITRE I : Suites numériques.....1

1) Propriétés de $\mathbb{R}$.....1

2) Suites numériques.....4

3) Suites convergentes-Propriétés.....5

4) Suites monotones.....9

5) Suites extraites.....11

6) Suites de Cauchy.....12

7) Suites adjacentes.....13

8) Suites récurrentes.....14

CHAPITRE II : Fonctions numériques d'une variable réelle.....16

1) Généralités.....16

a) fonctions paires et impaires.....16

b) Fonctions périodiques.....17

c) Fonctions monotones.....18

d) Fonctions bornées.....19

2) Limite d'une fonction.....19

3) Fonctions équivalentes.....23

4) Partie principale d'un infiniment petit.....25

CHAPITRE III : Fonctions continues.....27

1) Définitions et propriétés.....27

2) Théorème des valeurs intermédiaires conséquences.....28

ETUSUP .com

CHAPITRE IV : Fonctions dérivables 35

1) Dérivée d'une fonction.....35

2) Extremums d'une fonction dérivable.....42

3) Théorème des accroissements finis.....43

CHAPITRE V : Formules de Taylor.....47

1) Formule de Taylor avec reste de Lagrange.....47

2) Formule de Maclaurin avec reste de Lagrange.....49

3) Formule de Taylor avec reste de Young.....50

4) Formule de Maclaurin-Young.....50

5) Applications.....51

a) Recherche d'extremums.....51

b) Recherche de la partie principale d'un infiniment petit.....53

c) Allure d'une courbe au voisinage d'un point.....53

CHAPITRE VI : Développements limités 55

1) Développements limités au voisinage de 0.....55

2) Opérations sur les développements Limités.....59

3) Développements limités au voisinage d'un point x_0.....63

4) Développement limité généralisé.....65

5) Application:.....66

a) Calcul des limites.....66

b) Détermination des asymptôtes.....66

CHAPITRE VII : Fonctions circulaires réciproques
Fonctions hyperboliques 68

1) Fonctions circulaires réciproques.....68

2) fonction Arccosinus.....68

ETUSUP .com

3) fonction Arcsinus.....69
4) Fonction Arctangente.....70

2) Fonctions hyperboliques.....71
a) Cosinus hyperbolique - Sinus hyperbolique.....71
b) Tangente hyperbolique.....72

3) Fonctions hyperboliques réciproques.....73
a) Fonction Argument sinus hyperbolique.....73
b) Argument cosinus hyperbolique.....74
c) Fonction Argument tangente hyperbolique.....75

CHAPITRE VIII : Intégrale simple.....76
1) Primitive d'une fonction.....76
2) Intégrale d'une fonction continue-Propriétés.....76
3) Calcul des primitives:.....82
a) Primitives usuelles.....82
b) Intégrales des fonctions rationnelles.....83
c) Applications.....85

CHAPITRE IX : Intégrales généralisées.....88
1) Définitions.....88
2) Calcul pratique des intégrales généralisées.....90
a) Utilisation des primitives.....90
b) Changement de variable.....91
c) Intégration par parties.....91
3) Critères de convergence.....92

CHAPITRE X : Equations différentielles du 1er ordre.....98
1) Equations à variables separées.....98
2) Equation homogène.....99

ETUSUP .com

3) Equations linéaires du 1er ordre.....100

4) Equations se ramenant à une équation linéaire:.....102

a) Equation de Bernouilli.....102

b) Equation de Riccati.....103

CHAPITRE XI : Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.....105

1) Intégration de l'équation sans second membre.....105

2) Intégration de l'équation complete:.....107

a) Recherche des solutions particulières.....107

b) Méthode de variation de la constante.....109

ETUSUP .com

CHAPITRE I

SUITES NUMERIQUES

1) Propriétés de $\mathbb{R}$:

$\mathbb{R}$-désigne l'ensemble des nombres réels; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

On rappelle qu'un ensemble E muni d'une loi T est appelé groupe commutatif si:

i) La loi T est interne: $\forall\, x, y \in E,\ xTy \in E$.

ii) La loi T est associative: $\forall x, y, z \in E,\ (xTy)Tz = xT(yTz)$.

iii) il existe $e \in E$ unique tel que: $\forall\, x \in E,\ xTe = eTx = x$.
(e est appelé élément neutre de la loi T).

iv) Pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que : $xTy = yTx = e$.
(on dit que x et y sont symétriques par rapport à T).

v) la loi T est commutative: $\forall\, x, y \in E,\ xTy = yTx$.

Proposition : $(\mathbb{R}, +, .)$ *est un corps commutatif, c'est-à-dire:*

- $(\mathbb{R}, +)$ *et* $(\mathbb{R}^*, .)$ *sont deux groupes commutatifs.*
- *La loi "." est distributive par rapport à "+".*

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x le nombre $|x|$ tel que:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On définit ainsi une application de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
$x \to |x|$

ETUSUP .com

Proposition : *Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors :*

$|x| = 0 \Leftrightarrow x=0$.

Soit $a \geq 0$. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

$|xy| = |x| . |y|$.

$|x+y| \leq |x| + |y|$ (*appelée inégalité triangulaire*).

$||x|-|y|| \leq |x-y|$.

$x \leq y$ *et* $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

$x \leq y$ *et* $y \leq x \Rightarrow x = y$.

Si $x \leq y$ *et* $a \geq 0$, *alors* $ax \leq ay$. (*si* $a \leq 0$, *on a* $ax \geq ay$).

Si $0 < x \leq y$, *alors* $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.

$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, *ou bien* $x \leq y$, *ou bien* $x \geq y$.

Définition : *Soit A une partie non vide de* $\mathbb{R}$.

On dit que A est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ *tel que* :

$$\forall x \in A, \ x \leq M.$$

Le plus petit des majorants de A, lorsqu'il existe, est appelé borne supérieure de A, et noté Sup A.

A est dite minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ *tel que* :

$$\forall x \in A, \ x \geq m.$$

Le plus grand des minorants, lorsqu'il existe, est appelé borne inférieure de A, et notée Inf A.

A est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exercice : a) Montrer que A est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\forall x \in A, \ |x| \leq M.$$

b) Montrer que $A = \{\sin x \ / \ x \in \mathbb{R}\}$ est bornée.

ETUSUP .com

Remarque : La partie $A = [1,+\infty[$ n'admet pas de borne supérieure, car elle n'est pas majorée. De même $B =]-\infty,0]$ n'admet pas de borne inférieure.

Donc la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie A de $\mathbb{R}$ n'existe pas toujours.

Donnons maintenant une caractérisation de Sup A et Inf A où A est une partie non vide de $\mathbb{R}$:

$$M = \text{Sup } A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq M. \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}$$

$$m = \text{Inf } A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ m \leq x. \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ m \leq x < m + \varepsilon . \end{cases}$$

Exercice : soit $A = [-1,0[\cup]0,\sqrt{2}[$. Montrer, en utilisant la caractérisation précédente, que Sup A = $\sqrt{2}$ et Inf A = -1.
(Remarquer que sup A et Inf A n'appartiennent pas nécéssairement à A).

Théorème : *Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

Toute partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Exemples : On considère $A = \{ \frac{1}{n+1} ,\ n \in \mathbb{N} \}$.
$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 2$, donc A est majorée par 2, minorée par 0.
D'après le théorème précédent Sup A et Inf A existent. Montrer que Sup A = 1 et Inf A = 0.

ETUSUP .com

<u>Proposition</u> : L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est Archimédien, c'est-à-dire, $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N}, x < n$.

تذكير

<u>Exercice</u> : Utiliser cette proposition pour montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists! k \in \mathbb{N}, k \leq x < k+1.$$

Le nombre k est appelé partie entière de x, noté E(x).

اقتراح

<u>Proposition</u> : L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $\exists r \in \mathbb{Q}$, $a < r < b$.

نص

<u>Démonstration</u> : Considérons le nombre $x = \frac{1}{b-a} > 0$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{b-a} < n$. Désignons par k la partie entière de an. $k = E(an)$. On a $k \leq an < k+1$. Montrons que $a < \frac{k+1}{n} < b$.

$\frac{k+1}{n} - a = \frac{k}{n} + \frac{1}{n} - a \leq a + \frac{1}{n} - a = \frac{1}{n} < b - a$. **Donc $\frac{k+1}{n} < b$.**

D'autre part $a < \frac{k+1}{n}$. Le nombre $r = \frac{k+1}{n} \in \mathbb{Q}$ répond à la question.

<u>Exemple</u> : L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ car si on prend $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, il n'existe aucun élément $r \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{1}{3} < r < \frac{1}{2}$.

2) <u>Suites numériques</u> :

<u>Définition</u> :On appelle suite numérique toute application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to u(n)$. On note $u_n = u(n)$, appelé terme général de la suite. On écrit aussi $u = (u_n)_n$.

ETUSUP .com

Exemple : $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to u(n) = \dfrac{1}{n^2+1} = u_n$

$u_0 = 1$, $u_1 = 1/2$, $u_2 = 1/5$, $u_3 = 1/10, \ldots\ldots$

Soient $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$ deux suites numériques . On pose par définition :

$$u.v = (u_n v_n)_n$$
$$u + v = (u_n + v_n)_n$$
$$\lambda.u = (\lambda u_n)_n \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple : $u = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)_n$, $v = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)_n$.

$$u.v = \left(\frac{1}{n+2}\right)_n \quad ; \quad u+v = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{n+1}{n+2}\right)_n, \quad \lambda u = \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)_n .$$

متقاربة

3) **Suites convergentes - Propriétés** :

Définition : une suite $(u_n)_n$ est dite convergente vers le nombre réel l si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} , \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow | u_n - l | \leq \varepsilon .$$

Notation : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$; $\lim\limits_{n} u_n = l$; $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Remarquons que la définition précédente ne change pas si on écrit des inégalités strictes au lieu des inégalités larges. Une suite qui ne converge pas est dite divergente. متباعدة

Exemple :soit $u = (u_n)_n$ avec $u_n = \dfrac{4n+1}{n+1}$. Montrons que $\lim\limits_{n} u_n = 4$.

Soit $\varepsilon > 0$, cherchons $N \in \mathbb{N}$ tel que la condition $n \geq N$ entraine $| u_n - 4| \leq \varepsilon$.

$$| u_n - 4 | = \left| \frac{4n+1}{n+1} - 4 \right| = \frac{3}{n+1} \leq \varepsilon \text{ dès que } n \geq \frac{3}{\varepsilon} - 1.$$

Si $\dfrac{3}{\varepsilon} - 1 < 0$, on prendra $N = 0$.

ETUSUP .com

si $\frac{3}{\varepsilon} - 1 \geq 0$, on prendra $N = E\left(\frac{3}{\varepsilon} - 1\right) + 1$.

On voit bien que le nombre N dépend de ε.

Proposition : *La limite d'une suite, lorsqu'elle existe, est unique.*

Démonstration : Supposons que $(u_n)_n$ est une suite qui converge en même temps vers l et l'. Montrons que $l = l'$.

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre quelconque. Par définition de la convergence, il existe N et N' éléments de $\mathbb{N}$ tels que:

$n \geq N$ entraine $|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $n \geq N'$ entraine $|u_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

.Pour $n \geq \text{Max}(N, N')$, on a :

$|l - l'| = |l - u_n + u_n - l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| \leq \varepsilon$. ε est quelconque, donc $|l - l'| = 0$, c'est-à-dire $l = l'$.

Définition : *Une suite $(u_n)_n$ est dite majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Autrement dit l'ensemble $\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ est majorée.

$(u_n)_n$ est dite minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Autrement dit $\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ est minoré.

$(u_n)_n$ est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire :

$\exists M \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Exemple La suite de terme général $u_n = \sin n$ est bornée car $-1 \leq \sin n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- La suite $(u_n)_n$ avec $u_n = n^2$ n'est pas majorée. Par contre elle est minorée par 0.

ETUSUP .com

Proposition : *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration : Soit $(u_n)_n$ telle que $\lim_n u_n = l$. Montrons que $(u_n)_n$ est bornée. La définition de la convergence entraine pour $\varepsilon = 1$ l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ entraine $|u_n - l| \leq 1$. Par suite:

$$\big||u_n| - |l|\big| \leq |u_n - l| \leq 1 \Rightarrow |u_n| \leq 1 + |l| \quad \text{pour } n \geq N.$$

Soit $M = \text{Max}\,(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n-1}|, 1+|l|)$. Alors $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $(u_n)_n$ est bornée.

Proposition : *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes avec $\lim_n u_n = l$ et $\lim_n v_n = l'$ $(l, l' \in \mathbb{R})$. Alors :*

i) $\lim_n (u_n + v_n) = (\lim_n u_n) + (\lim_n v_n)$

ii) $\lim_n (u_n . v_n) = (\lim_n u_n).(\lim_n v_n)$

iii) $\lim_n (\lambda\, u_n) = \lambda \lim_n u_n$, *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$

iv) si $v_n \neq 0$ *et* $l' \neq 0$, *alors* $\lim_n \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim_n u_n}{\lim_n v_n}$.

v) si $u_n \leq v_n \;\forall\, n \in \mathbb{N}$, *alors* $\lim_n u_n \leq \lim_n v_n$.

Démonstration :

i) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N et $N' \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq N$ entraine $|u_n - l| \leq \varepsilon/2$ et $n \geq N'$ entraine $|v_n - l'| \leq \varepsilon/2$. Donc pour $n \geq N_0$, avec $N_0 = \text{Max}\,(N, N')$, on a:

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

ii) Soit $\varepsilon > 0$. Comme dans i) il existe $N, N' \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq N$ entraine $|u_n - l| \leq \varepsilon$ et $n \geq N' \Rightarrow |v_n - l'| \leq \varepsilon$. Pour $n \geq N_0$, avec $N_0 = \max\,(N, N')$, on a :

$$|u_n v_n - ll'| = |u_n v_n - u_n l' + u_n l' - ll'| \leq |u_n|\,|v_n - l'| + |l'|\,|u_n - l|$$
$$\leq M\varepsilon + |l'|\varepsilon = (M + |l'|)\varepsilon.$$

ETUSUP .com

. M est le nombre qui majore $(|u_n|)_n$ puisque (u_n) est convergente.

Dans cette démonstration on a majoré la quantité $|u_n v_n - ll'|$ par un multiple de ε. Ce qui suffit pour entrainer la convergence de $(u_n v_n)_n$ vers ll'.

iii) Il suffit de prendre $v_n = \lambda$ $\forall n \in \mathbb{N}$, et d'appliquer ii).

iv) Il suffit de montrer que $\lim \left(\frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{l'}$ et d'appliquer ii)

$v_n \longrightarrow l' \neq 0$. Posons $\varepsilon = |l'|/2 > 0$. Il existe alors $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1$ entraine $||v_n| - |l'|| \leq |v_n - l'| \leq |l'|/2 \Rightarrow |v_n| \geq |l'|/2$, pour tout $n \geq N_1$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - l'| \leq \varepsilon$. Pour $n \geq \text{Max}(N_1, N_2)$, on a :

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'}\right| = \frac{|v_n - l'|}{|l'| \cdot |v_n|} \leq \frac{2\varepsilon}{|l'|^2}$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{l'}$.

v) On a $u_n \leq v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et on veut montrer que $\lim\limits_n u_n \leq \lim\limits_n v_n$ c'est-à-dire $l \leq l'$. Supposons que $l > l'$. Puisque $\lim\limits_n (v_n - u_n) = l' - l$, on a pour $\varepsilon = \frac{l-l'}{2} > 0$, l'existence d'un nombre $N \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq N$ entraine $|(v_n - u_n) - (l' - l)| \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon = \frac{l-l'}{2} \Rightarrow v_n - u_n \leq \frac{l'-l}{2} < 0$.

Ce qui est impossible car $v_n - u_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc $l \leq l'$.

<u>Remarque</u> : si $u_n < v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_n u_n \leq \lim\limits_n v_n$. Prenons par exemple $u_n = \frac{-1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$. On a: $u_n < v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ pourtant $\lim\limits_n u_n = \lim\limits_n v_n = 0$.

ETUSUP .com

$|W_n - l| < \varepsilon$.

Exercices :

a) Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$, alors $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |l|$.

b) soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites numériques telles que $u_n \leq w_n \leq v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Montrer que si $\lim_n u_n = \lim_n v_n = l$, alors $\lim w_n = l$ (Utiliser la définition de la convergence).

Application: Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

رتيبة

4) **Suites monotones** :

Définition : *une suite $(u_n)_n$ est dite croissante (resp. décroissante) si:*

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} \geq u_n$ *(resp.* $u_{n+1} \leq u_n$*).*

Si l'inégalité est stricte ,on dira que $(u_n)_n$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Exemples :

- La suite $(u_n)_n$, avec $u_n = n^2$ est strictement croissante.

En effet: $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 1+2n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

- La suite $(u_n)_n$ avec $u_n = (-1)^n$ elle est ni croissante ni décroissante.

Exercice :

Si $(u_n)_n$ est croissante, alors la condition $n \leq m$ entraine $u_n \leq u_m$.

Une suite qui est croissante n'est pas nécéssairement convergente . En effet, la suite $(u_n)_n$, $u_n = n^2$, est croissante mais elle n'est pas convergente. Le théorème important suivant va nous permettre de préciser cette remarque.

ETUSUP .com

Théorème : (de convergence monotone des suites)

Toute suite $(u_n)_n$ croissante majorée est convergente. Sa limite est égale à la borne supérieure de l'ensemble $A = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$.

Toute suite $(u_n)_n$ décroissante minorée est convergente. Sa limite est égale à la borne inférieure de A.

Démonstration:

soit $(u_n)_n$ une suite croissante majorée. L'ensemble $A = \{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ admet donc une borne supérieure $l = \text{Sup}A$. Montrons que $\lim_n u_n = l$. D'après la caractérisation de $l = \text{sup}A$, on a pour $\varepsilon > 0$ donné l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $l - \varepsilon < u_N \leq l$.

$(u_n)_n$ est croissante, donc pour $n \geq N$:

$$l - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq l \leq l + \varepsilon,$$

c'est-à-dire $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Par suite $\lim_n u_n = l$.

Exercice : soit $(u_n)_n$ la suite définie par:

$$u_n = \frac{1}{1+2^0} + \frac{1}{1+2^1} + \frac{1}{1+2^2} + \ldots + \frac{1}{1+2^n}$$

Montrer que $(u_n)_n$ est croissante, majorée par 2. En déduire qu'elle est convergente.

Définitions (limites infinies)

On dit que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ si:

$\forall A > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ entraine $u_n \geq A$.

De même $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ si :

$\forall A > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ entraine $u_n \leq -A$.

ETUSUP .com

Exercice: Montrer, en utilisant la définition , que:

$$\lim_{n} \frac{n^2+1}{n+1} = +\infty .$$

5) **suites extraites** : مستخرجة

Une suite $(v_n)_n$ est dite extraite de la suite $(u_n)_n$ s'il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Par exemple la suite $(u_{2n})_n$ est une suite extraite de $(u_n)_n$ ici $\varphi(n)= 2n$. Cette suite est formée par tous les termes d'indices paires u_0 , u_2, u_4, u_6, u_8, u_{10},..., u_{2n}, ...

Proposition : *Si $(u_n)_n$ est convergente, alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ est convergente et a la même limite que $(u_n)_n$.*

Pour démontrer cette proposition on a besoin du résultat suivant: si $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, alors $\varphi(n) \geq n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. (à démontrer par récurrence).

Démonstration de la proposition :

soient $(u_n)_n$ une suite convergente vers 1 et $(v_n)_n=(u_{\varphi(n)})_n$ une suite extraite de $(u_n)_n$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$.
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ entraine $|u_n-1| \leq \varepsilon$ .Or $n \geq N$ implique $\varphi(n) \geq \varphi(N) \geq N$ (d'après le résultat précédent). Par suite $|v_n-1| = |u_{\varphi(n)}-1| \leq \varepsilon$. Donc $\lim_{n} v_n = 1$.

Remarque : La réciproque n'est pas vraie. La suite $u_n = (-1)^n$ est divergente,alors que la suite extraite $u_{2n}=1$ est convergente vers 1.

ETUSUP .com

Exercice : Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite l, alors la suite $(u_n)_n$ converge aussi vers l.

6) **suites de Cauchy** :

On se propose de donner la réponse à la question suivante: Peut-on montrer qu'une suite $(u_n)_n$ est convergente sans avoir besoin de connaitre, à priori, sa limite ?

Définition (critère de Cauchy):

Une suite $(u_n)_n$ est dite de Cauchy si elle possède la propriété suivante:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \ , \ \forall p,q \in \mathbb{N} : p,q \geq N \text{ entraine } |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

La proposition suivante va nous donner des exemples de suites de Cauchy:

Proposition : *Toute suite convergente est de Cauchy .*

Démonstration : Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers l. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ entraine $|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $p,q \geq N$, on a : $|u_p - u_q| \leq |u_p - l| + |u_q - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Donc $(u_n)_n$ est de Cauchy.

Exemple : La suite $(u_n)_n$, $u_n = \frac{4n+1}{n+1}$, est convergente vers 4. Donc elle est de Cauchy.

ETUSUP .com

Théorème : *Toute suite de Cauchy est convergente.*

Pour montrer qu'une suite est convergente, il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy.

Exercice : On considère de nouveau la suite $(u_n)_n$ définie par:

$$u_n = \frac{1}{1+2^0} + \frac{1}{1+2^1} + \frac{1}{1+2^2} + \ldots + \frac{1}{1+2^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que cette suite est convergente en vérifiant qu'elle est de Cauchy.

7) **Suites adjacentes** :

Définition : *Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes si l'une est décroissante, l'autre est croissante et $\lim_n (v_n - u_n) = 0$.*

Exemple : soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites avec $u_n = \frac{-1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{n+1}$. $(u_n)_n$ est croissante, $(v_n)_n$ est décroissante et $\lim_n (u_n - v_n) = \lim_n \left(\frac{-2}{n+1} \right) = 0$. $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont donc adjacentes. Remarquons que $\lim_n u_n = \lim_n v_n$

Proposition : *Deux suites adjacentes sont convergentes et admettent la même limite.*

ETUSUP .com

Démonstration : Supposons que $(u_n)_n$ est croissante, $(v_n)_n$ est décroissante et $\lim_n (v_n - u_n) = 0$. La suite $(v_n - u_n)_n$ est décroissante et converge vers 0. Donc $v_n - u_n \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n \leq v_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. D'autre part:

$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq v_{n-2} \leq \ldots \leq v_0$. Par suite: $(u_n)_n$ est croissante majorée par v_0 et $(v_n)_n$ est décroissante minorée par u_0. Le théorème de la convergence monotone des suites entraine que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l'$. De plus $\lim_n (u_n - v_n) = \lim_n u_n - \lim_n v_n = l - l' = 0$, c'est-à-dire $l = l'$.

Exercice : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par:

$$u_{n+1} = \frac{3}{5} u_n + \frac{2}{5} v_n \quad , \; u_0 = 1.$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{5} u_n + \frac{3}{5} v_n \quad , \; v_0 = 2.$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Conclure. Calculer $\lim_n u_n$ et $\lim_n v_n$

توجيه

8) **Suites récurrentes** :

Soit $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(D) \subset D$. On appelle suite récurrente, une suite $(u_n)_n$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in D$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemple :

$$u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}$$

$$u_0 = 0$$

$u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f: [-3,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $D = [-3,+\infty[$, $f(x) = \sqrt{x+3}$.

On vérifie que $f(D) \subset \mathbb{R}^+ \subset D$.

ETUSUP .com

Proposition: *Toujours avec les notations ci-dessus, si f est continue et $(u_n)_n$ converge vers l, alors l vérifie l'équation $l=f(l)$.*

Pour calculer l, il faut résoudre l'équation f(l)=l. Grâce à l'unicité de la limite, une seule valeur de l convient.

Proposition : *On garde les notations ci-dessus.*

Si f est croissante , alors:

i) $(u_n)_n$ est croissante si $f(u_0) - u_0 \geq 0$

ii) $(u_n)_n$ est décroissante si $f(u_0) - u_0 \leq 0$.

Démonstration : *A faire par récurrence à titre d'exercice.*

Exemple : La suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{3+u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$ est croissante

car $f(x) = \sqrt{3+x}$ est croissante et $f(u_0) - u_0 = \sqrt{3} \geq 0$.

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..